ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\dfrac{42}{2\nu+1}$ να είναι ακέραιος.

2. Θεωρούμε οξεία γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$ και την προέκταση ΟΓ της πλευράς ΟΑ. Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΓ και περιέχει το σημείο Β, φέρουμε ευθεία $\mathrm{O\Delta} \perp \mathrm{OA}$ και ευθεία $\mathrm{OE} \perp \mathrm{OB}$. Αν είναι $\widehat{\Gamma\mathrm{OE}} = 4\widehat{\mathrm{AOB}}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

3. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $(\gamma-\delta)(\gamma+\delta)\neq 0$ και

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta},$$

να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ισούται με 0.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $\overline{xyzxyz}$, όπου x, y, z είναι ψηφία με $x \neq 0$ διαιρείται με τους αριθμούς 7, 11 και 13.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνεται ο αριθμός $\mathrm{A} = 2^{92} \cdot 5^{90} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει ο Α και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του.

2. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς x, y, z που είναι τέτοιοι ώστε:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z}.$$

3. Έστω Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=6. Αν είναι $\mathrm{MK} \perp \mathrm{AB}$, $\mathrm{M\Lambda} \perp \mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{K_1\Lambda_1}$ είναι η προβολή του ΚΛ στη ΒΓ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $\mathrm{KK_1\Lambda_1\Lambda}$.

4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια. Αν κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ με $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$ και η παράσταση

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha|\delta-\gamma|+\alpha|\delta-\varepsilon|+\varepsilon|\beta-\alpha|+\varepsilon|\beta-\gamma|}{|\beta-\alpha|+|\beta-\gamma|+|\delta-\gamma|+|\delta-\varepsilon|}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι: $\beta<\mathrm{K}<\delta$.

(ii) Αν είναι

$$x=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta),\ y=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta),\ z=(\alpha+\delta)(\beta+\gamma),$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς x,y,z.

2. Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Μ τέτοιο ώστε $\widehat{\mathrm{MB\Gamma}}=\widehat{\mathrm{M\Gamma B}}$ και πάνω στις ΜΒ και ΜΓ υπάρχουν σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ και $\widehat{\mathrm{MA\Delta}}=\widehat{\mathrm{MAE}}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

3. Αν είναι $x,y>0$ και $x^3+y^2\le 64$, να αποδείξετε ότι:

$$x^4+y^3<512.$$

4. Έχουμε κέρματα και χαρτονομίσματα των 1, 10 και 100 ευρώ. Είναι δυνατόν με 1000 ακριβώς από αυτά να σχηματίσουμε το ποσό των 50000 ευρώ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)\left(1 - x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ.

2. Θεωρούμε τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 90^\circ$ και προεκτείνουμε τη χορδή ΑΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=ΑΒ. Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι: ΚΒ= 2ΚΑ.

3. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha+\beta}} \geq \alpha^\alpha \beta^\beta .$$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι ΜΚ= x, ΜΛ= y, να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S = x^2 + y^2$$

και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες *Καλή επιτυχία*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν $\log_{150} 2 = x,\ \log_{150} 3 = y$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = 50^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}$$

2. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 + x_1^2\right)\left(1 + x_2^2\right)\left(1 + x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ .

3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}} = \frac{2x^3+1}{3}.$$

4. Αν Ι είναι το έγκεντρο τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{B\Gamma}=2$ και $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = 60^\circ$, να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{IA} + \mathrm{IB} + \mathrm{I\Gamma} \le 2\sqrt{3}.$$

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***