ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ Ε.Μ.Ε.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

1993-1994

ΜΕΡΟΣ Α

1. Δύο ίσα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ πλευράς 10 τοποθετούνται έτσι ώστε η κορυφή Ε να βρίσκεται στο κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ.
Το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που καλύπτεται κατ' αυτόν τον τρόπο είναι
α) 75, **β)** 10, **γ)** 125, **δ)** 150, **ε)** 175.

2. Τρεις κύβοι με όγκο 1, 8, 27 είναι κολλημένοι μεταξύ τους στις έδρες τους.
Η ελάχιστη δυνατή επιφάνεια του σχηματιζόμενου στερεού έχει εμβαδόν
α) 36, **β)** 56, **γ)** 70, **δ)** 72, **ε)** 74.

3. Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί, συμβολίζουμε με m(x,y) τον μικρότερο από τους x, y και αντίστοιχα με M(x,y) τον μεγαλύτερο από τους x, y.
Αν $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$ τότε $M\{M[\alpha,m(\beta,\gamma)],m[\delta,m(\alpha,\varepsilon)]\}=$
α) α, **β)** β, **γ)** γ, **δ)** δ, **ε)** ε.

4. Σ' ένα σάκο υπάρχουν μπλε και κόκκινοι βώλοι.
Αν αφαιρέσουμε από τον σάκο έναν κόκκινο βώλο, τότε το ένα έβδομο των υπολοίπων βώλων είναι κόκκινοι.
Αν, αντί του κόκκινου βώλου αφαιρέσουμε από τον σάκο δύο μπλε βώλους, τότε το ένα πέμπτο των υπολοίπων βώλων είναι κόκκινοι.
Πόσοι βώλοι υπήρχαν στο σάκο;
α) 8, **β)** 22, **γ)** 36, **δ)** 57, **ε)** 71.

5. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις 8 και $2\sqrt{2}$ έχει το ίδιο κέντρο μ' ένα κύκλο ακτίνας 2.
Το κοινό εμβαδόν των δύο γεωμετρικών σχημάτων είναι
α) 2π, **β)** $2\pi+2$, **γ)** $4\pi-4$, **δ)** $2\pi+4$, **ε)** $2\pi-2$.

6. Μέσα σ' ένα κουτί υπάρχουν:
μία σφαίρα σημαδεμένη με τον αριθμό 1
δύο σφαίρες σημαδεμένες με τον αριθμό 2
τρεις σφαίρες σημαδεμένες με τον αριθμό 3 ...
και πενήντα σφαίρες σημαδεμένες με τον αριθμό 50
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός σφαιρών που πρέπει να τραβήξουμε τυχαία από το κουτί για να είμαστε σίγουροι ότι θα υπάρχουν δέκα σφαίρες σημαδεμένες με τον ίδιο αριθμό;
α) 10, **β)** 51, **γ)** 415, **δ)** 451, **ε)** 501.

7. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. με λόγο $\lambda\neq1$ και οι αριθμοί α, 2β, 3γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., τότε ο λόγος λ ισούται με

α) $\frac{1}{4}$, **β)** $\frac{1}{3}$, **γ)** $\frac{1}{2}$, **δ)** 2, **ε)** 4.

8. Εννέα καρέκλες σε ευθεία γραμμή πρόκειται να καλυφθούν από 6 μαθητές και 3 καθηγητές Α, Β, Γ. Οι καθηγητές φθάνουν πριν από τους μαθητές και αποφασίζουν να επιλέξουν τις καρέκλες τους έτσι, ώστε κάθε καθηγητής να έχει αμέσως δεξιά του και αμέσως αριστερά του μαθητή.
Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι καθηγητές να διαλέξουν τις καρέκλες τους.

α) 12, **β)** 36, **γ)** 60, **δ)** 84, **ε)** 630.

9. Αν α, β είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|\alpha|+\beta=3, \qquad |\alpha|\beta+\beta^3=0,$$

τότε ο πλησιέστερος ακέραιος στον αριθμό α–β είναι

α) –3, **β)** –1, **γ)** 2, **δ)** 3, **ε)** 5.

10. Αν ρίξουμε ν ζάρια, η πιθανότητα να πάρουμε άθροισμα 1994 είναι θετική και ισούται με τη πιθανότητα να πάρουμε ως άθροισμα κάποιο αριθμό Α.
Η μικρότερη δυνατή τιμή του Α είναι

α) 333, **β)** 335. **γ)** 337. **δ)** 339. **ε)** 341.

ΜΕΡΟΣ Β

1. Έστω β>3, β ακέραιος, μία βάση την οποία χρησιμοποιούμε για την παράσταση αριθμών (στο δεκαδικό σύστημα β=10).
Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός που έχει παράσταση 131 στη βάση β δεν μπορεί να είναι τετράγωνο ακέραιου αριθμού.

2. Μία κοινή εσωτερική εφαπτομένη δύο κύκλων τέμνει τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων αυτών στα σημεία Α και Δ. Η ευθεία ΑΔ συναντά τους κύκλους στα σημεία Β και Γ.
Να αποδειχτεί ότι ΑΒ=ΓΔ.

3. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x τέτοιοι, ώστε ο αριθμός $A=\left[(x^2+3)^{\frac{1}{2}}+x\right]^{\frac{1}{3}}-\left[(x^2+3)^{\frac{1}{2}}-x\right]^{\frac{1}{3}}$ να είναι ακέραιος.

1995-1996

1. Έστω πολυώνυμο $P(x)=x^{\nu}+(\nu-1)x^{\nu-1}+\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

1) Να εξετάσετε αν υπάρχει ν, ώστε $P(2)=3\cdot 2^{\nu-1}+1$.

2) Να αποδείξετε ότι $P(1)=2\cdot P(1-\nu)$.

2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=2\hat{B}$, ΑΔ διχοτόμος, Ε το μέσο της ΑΓ και η ΔΕ είναι παράλληλη προς την ΑΒ.
Να βρεθούν οι γωνίες του ΑΒΓ.

3. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ευθείες (ε) και ($ε_1$) που διέρχονται από το Α και τέμνουν τις ΒΔ, ΔΓ, ΒΓ στα Ε, Ζ, Η και Κ, Λ, Μ αντίστοιχα.
Αν ΑΕ=λ·ΑΚ (1), (λ>0), να δειχτεί ότι: $\frac{(EZ)(EH)}{(K\Lambda)(KM)}=\lambda^2$ (2).

4. Σε 14 κουτιά υπάρχουν 25 σοκολάτες και είναι γνωστό ότι κάθε κουτί περιέχει 1 ή 2 ή 3 σοκολάτες. Ακόμα γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των κουτιών με μια σοκολάτα είναι μεγαλύτερος του 6 και ότι ο αριθμός των σοκολατών στα κουτιά με 2 ή 3 σοκολάτες είναι μεγαλύτερος από 17.
Να προσδιορίσετε πόσα κουτιά περιέχουν μία, δύο ή τρεις σοκολάτες.

1996-1997

1. Έστω οι αριθμοί α, β, γ, δ τοποθετημένοι στις θέσεις: $\begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \\ \hline \end{array}$.

Κάνουμε την παρακάτω κίνηση:
Είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας γραμμής,
είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας στήλης.
Να δειχτεί ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$ (όλα μηδέν)

<u>αν και μόνο αν</u> α+δ=β+γ.

2. Να λυθεί στο σύνολο των ακεραίων το σύστημα

$$(\Sigma): \begin{cases} x^2+y^2+z^2=155 \\ x+y+z=21 \end{cases}.$$

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R).
Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Ε,
η διχοτόμος της $A\hat{E}\Gamma$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ
και η ΒΖ τέμνει τον κύκλο στο Κ και τη ΓΕ στο Λ.
Να δειχτεί ότι $\frac{KZ}{K\Lambda}=\frac{AZ}{A\Gamma}\cdot\frac{EB}{E\Lambda}$.

4. Έστω το σύνολο $A=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ $\alpha_i \geq 0$, $i=1, 2, \ldots, \nu$.

Για κάθε i, j υπάρχει κ, $(1 \leq i,j,\kappa \leq \nu)$ ώστε $\alpha_\kappa = \frac{1}{2}|\alpha_i - \alpha_j|$ (1).

Να δειχτεί ότι όλα τα $\alpha_i = 0$.

1997-1998

1. Έστω $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^*$ και $A=\frac{\alpha^3+1}{\beta+1}+\frac{\beta^3+1}{\alpha+1} \in \mathbb{N}^*$.

Να δειχτεί ότι οι αριθμοί $\frac{\alpha^3+1}{\beta+1}$, $\frac{\beta^3+1}{\alpha+1}$ είναι φυσικοί.

2. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB=\sqrt{2}\,A\Delta$. Με διάμετρο την ΔΓ γράφουμε ημικύκλιο στο εξωτερικό του ΑΒΓΔ και συνδέουμε σημείο του Μ με τα Α, Β. Έστω Κ, Λ οι τομές των ΜΑ, ΜΒ με την ΔΓ.
Να δειχτεί ότι $\Delta\Lambda^2+\Gamma K^2=AB^2$.
(Η άσκηση αυτή κατασκευάστηκε από τον P. Fermat και λύσεις έδωσαν οι L. Euler, R Simson κ.α.)

3. Να δειχτεί ότι ο αριθμός $A=\underbrace{11\ldots1}_{\nu\ \psi\eta\varphi\iota\alpha}2\underbrace{11\ldots1}_{\nu\ \psi\eta\varphi\iota\alpha}$ είναι σύνθετος για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

4. Έστω $0 \leq \alpha,\beta,\gamma,\delta \leq 1$ και $0 \leq x,y,z,w \leq \frac{1}{2}$ ώστε $\alpha+\beta+\gamma+\delta=x+y+z+w=1$ (1).

Να δειχτεί ότι $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta w \geq \min\left\{\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\alpha+\delta}{2}, \frac{\beta+\gamma}{2}, \frac{\beta+\delta}{2}, \frac{\gamma+\delta}{2}\right\}$.

1998-1999

1. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ με $f(1)=1999$ και ισχύει
$$f(1)+f(2)+\ldots+f(\nu)=\nu^2 f(\nu) \ (1),\ \nu \in \mathbb{N}^*.$$
Να υπολογιστεί ο f(1999).

2. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι ν, για τους οποίους η εξίσωση
(E): $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\nu}{x+y}$, $xy(x+y) \neq 0$ έχει ακέραιες λύσεις.

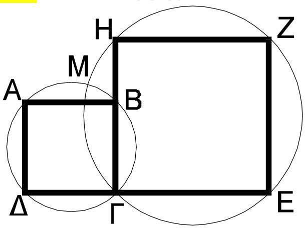
3. Για $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu \in \mathbb{P}$ ονομάζουμε ***άθροισμα Cesaro*** τον αριθμό
$$C_\nu=\frac{s_1+s_2+\ldots+s_\nu}{\nu}, \quad \text{όπου } s_\kappa=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa.$$

Το άθροισμα Cesaro των αριθμών $α_1, α_2, ..., α_{99}$ είναι 1000.
Να υπολογιστεί άθροισμα Cesaro των αριθμών $1, α_1, α_2, ..., α_{99}$.

4. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρο. Από το Θ φέρνουμε ευθεία που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα.
Να δειχτεί ότι $\left(\frac{ΒΚ}{ΑΚ}\right)^4+\left(\frac{ΓΛ}{ΑΛ}\right)^4 \geq \frac{1}{8}$.

1999-2000

1. Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΕΖΗ είναι τετράγωνα και οι



περιγεγραμμένοι κύκλοι τους τέμνονται στα Γ και Μ.
Να δειχτεί ότι: **1)** Τα σημεία Δ, Μ και Η είναι συνευθειακά.
2) Τα σημεία Μ, Β και Ε είναι συνευθειακά.

2. Έστω $x,y \in P^*$. Να δειχτεί ότι $2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-5\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6 \geq 0$.

3. Έστω κύκλος (Ο,R) και χορδή του ΒΓ μήκους $α<2R$. Σημείο Α κινείται στο τόξο ΒΓ έτσι ώστε $Β\hat{Α}Γ<90^o$.
Να προσδιορίσετε τη θέση του Α, για την οποία η παράσταση $ΑΒ^2+ΑΓ^2$ γίνεται μέγιστη και να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης.

4. Ο εξαψήφιος αριθμός $\overline{α2000β}$ είναι πολλαπλάσιο του 99.
Να βρεθούν τα ψηφία α και β.

2000-2001

1. Έστω κύκλος (Ο,R), μια διάμετρός του ΑΒ και ένα σημείο του Γ διαφορετικό των Α, Β. Θεωρούμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Β και Γ αντιστοίχως, οι οποίες τέμνονται στο Ρ. Η κάθετος από το Γ στη διάμετρο ΑΒ τη τέμνει στο Δ, ενώ η ευθεία ΑΡ τέμνει την ευθεία ΓΔ στο Ε.
Να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{ΓΕ}{ΓΔ}$.

2. Για x,y,z>0 να αποδειχτεί ότι:

α) $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \leq x+y$. **β)** $f(x,y,z)=\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \leq x+y+z$.

3. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=3α και τα σημεία του Γ και Θ με ΒΓ=α, ΒΘ=2α. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΒΓΔΕ και ΒΘΗΖ εκατέρωθεν του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ, ΔΕ και ΕΗ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

4. Δύο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:
Πάνω σε ένα κύκλο δίνονται 100 διαφορετικά σημεία και οι δύο μαθητές διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο γράφουν μια χορδή, διαφορετική κάθε φορά, με άκρα δύο οποιαδήποτε από τα 100 δεδομένα σημεία. Το παιχνίδι τελειώνει όταν καθένα από τα 100 σημεία χρησιμοποιηθεί ως άκρο χορδής μία τουλάχιστον φορά. Νικητής είναι ο μαθητής ο οποίος θα γράψει τη χορδή με την οποία τελειώνει το παιχνίδι.
Αν ο μαθητής Α αρχίσει πρώτος, ποιος από τους δύο μαθητές έχει στρατηγική νίκης; (δηλαδή ποιος από τους δύο μαθητές μπορεί να παίξει έτσι, ώστε να νικήσει, ανεξαρτήτως του πως θα παίξει ο άλλος;)

2001-2002

1. Να βρείτε όλες τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$(\Sigma): \begin{cases} x^2+y^2+2x \leq 1 \\ x-y+\alpha=0 \end{cases}$$ έχει μοναδική λύση και να λυθεί.

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$). Από σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε δύο ευθείες που χωρίζουν το τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία τρίγωνα ίσα μεταξύ τους.
Να δειχτεί ότι:
1) Το σημείο Δ είναι εσωτερικό σημείο της πλευράς ΑΒ, δηλαδή δεν είναι ένα από τα άκρα του.
2) $\hat{B}=30^o$.

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}<90^o$. Φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ κάθετο και ίσο προς την πλευρά ΑΒ καθώς και ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ κάθετο και ίσο προς την πλευρά ΑΓ, έτσι ώστε $\Delta\hat{A}E<90^o$.
Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το Α και το μέσον της ΒΕ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.

4. Στην Ε.Μ.Ε. γίνονται μαθήματα προετοιμασίας για τις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες για τους 20 μαθητές που προκρίνονται στην τελική φάση. Διδάσκονται 4 μαθήματα: Γεωμετρία, Θεωρία αριθμών, Συνδυαστική, Άλγεβρα.

Δήλωσαν συμμετοχή: στη Γεωμετρία 15 μαθητές, στη Θεωρία αριθμών 13, στη Συνδυαστική 14 και στην Άλγεβρα 19 μαθητές.
Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον μαθητής δήλωσε συμμετοχή και στα 4 μαθήματα.

2002-2003

1. Για τους ακέραιου α, β ισχύει $(\alpha-\beta)^2=\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}$ (1).

1) Να αποδείξετε ότι το α+β είναι τέλειο τετράγωνο.
2) Να βρείτε τα ζεύγη (α,β) των ακεραίων που ικανοποιούν την (1).

2. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε 25 σημεία με συντεταγμένες (κ,λ), όπου $\kappa,\lambda\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Να προσδιορίσετε το πλήθος των τετραγώνων που κατασκευάζονται με κορυφές 4 από τα 25 δεδομένα σημεία.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$). Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΓΕ. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ και ΜΔ=u, ΜΕ=v.
Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ, ως συνάρτηση των u, v.

4. Αν ισχύει $2\alpha^6-2\alpha^4+\alpha^2=\frac{3}{2}$, να δειχτεί ότι $\alpha^8>1$.

2003-2004

1. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την εξίσωση

$$(E):\ (9x^2-3x+3)(4y^2+12y+29)=55.$$

2. Έστω α, β θετικοί ακέραιοι με $1\leq\beta\leq\alpha$.
Θεωρούμε και τους αριθμούς $A=(\sqrt{\alpha^2+\beta}-\alpha)^2$, $B=(\sqrt{\alpha^2+\beta}+\alpha)^2$.
Να δειχτεί ότι:
1) Ο αριθμός $\sqrt{\alpha^2+\beta}$ είναι άρρητος.
2) Ο αριθμός Α είναι άρρητος με 0<Α<0,25.
3) Ο αριθμός Β είναι άρρητος με δεκαδικό μέρος μεγαλύτερο του 0,75.

3. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και σημεία Δ, Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΔΓ=$\frac{\alpha}{3}$, Ε μέσον της ΓΑ και ΑΖ=$\frac{3\alpha}{4}$.

Να βρεθεί η γωνία $\Delta\hat{E}Z$**.**

4. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΒΓ<ΑΒ<2ΒΓ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ παίρνουμε τα σημεία Μ, Ρ και Ν, αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΜΒ=ΓΡ=ΔΝ=ΑΒ–ΒΓ.

1) Να βρεθεί η γωνία $P\hat{A}N$**.**

2) Να αποδείξετε ότι $N\hat{M}\Gamma>\frac{\pi}{4}$**.**

2004-2005

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Δ. Από το Α φέρουμε κάθετη προς τη ΒΔ που τέμνει τη ΒΔ στο Ε και τη ΒΓ στο Ζ. Η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΖ στο σημείο Ι.

Να αποδείξετε ότι:

1) Η ΒΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Delta$**.**

2) Το τετράπλευρο ΒΖΔΙ είναι ρόμβος**.**

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ>ΑΓ και η κάθετος από το Γ προς τη διάμεσο ΑΔ την τέμνει στο Ε και ισχύει $A\hat{B}\Gamma=A\hat{\Gamma}E$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο**.**

3. Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x+y+z=16 \\ x^2+y^2+z^2=96 \end{cases}.$$

1) Να αποδείξετε ότι και οι τρεις ανήκουν στο διάστημα $[\frac{8}{3},\frac{26}{3}]$**.**

2) Αν $x,y,z\in\mathbb{Z}$ με $x\le y\le z$, να βρείτε τις τριάδες (x,y,z) που είναι λύσεις του (Σ)**.**

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ=α<ΓΑ=β<ΑΒ=γ.

Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν να ελαττωθούν και οι τρεις πλευρές κατά το ίδιο μήκος, έτσι ώστε να γίνουν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου**.**

2005-2006

1. Υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος ώστε:

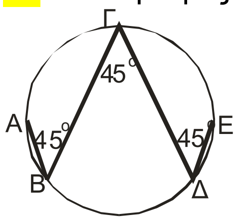
α) Ο 3ν είναι τέλειος κύβος, 4ν τέλεια τέταρτη δύναμη και ο 5ν τέλεια πέμπτη δύναμη;

β) Ο 3ν είναι τέλειος κύβος, 4ν τέλεια τέταρτη δύναμη και ο 5ν τέλεια πέμπτη δύναμη και ο 6ν τέλεια έκτη δύναμη;

2. Να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w για τους οποίους ισχύει:

$$\sqrt{x-y}+\sqrt{y-z}+\sqrt{z-w}+\sqrt{x+w}=x+2.$$

3. Οι κορυφές Α, Β, Γ, Δ, Ε μιας τεθλασμένης γραμμής βρίσκονται πάνω σε



ένα κύκλο όπως στο σχήμα.

Για τις γωνίες $A\hat{B}\Gamma=B\hat{\Gamma}\Delta=\Gamma\hat{\Delta}E=45^o$.

Να δειχτεί ότι $AB^2+\Gamma\Delta^2=B\Gamma^2+\Delta E^2$.

4. Μια πραγματική συνάρτηση f είναι ορισμένη στο Ρ και ισχύει:

$$f(x+1)\cdot f(x)+f(x+1)+1=f(x), \quad \text{για κάθε } x\in Ρ.$$

Να δειχτεί ότι για κάθε $x\in Ρ$ ισχύουν:

1) $f(x)\neq -1$, **2)** $f(x)\neq 0$, **3)** $f(x+4)=f(x)$.

2006-2007

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in Ρ$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Να εκφράσετε την παράσταση $\Gamma=(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)$ συναρτήσει των κ, λ.

2. Θεωρούμε τόξο $\overset{\frown}{AB}=90^o$ και προεκτείνουμε τη χορδή ΑΒ κατά τμήμα ΒΓ=ΑΒ. Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι ΚΒ=2ΚΑ.

3. Αν $\alpha,\beta\in N^*$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{\left(\dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}}\geq \alpha^\alpha\cdot\beta^\beta$.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι ΜΚ=x, ΜΛ=y, να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης $S=x^2+y^2$ και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

2007-2008

1. Να λύσετε την εξίσωση (Ε): $x^2+2=3\cdot\sqrt{3x-2}$.

2. Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου συμμετέχουν **ν** ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για την νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμό.
Στο τέλος του τουρνουά ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364.
Να βρεθεί ο αριθμός **ν** των ομάδων που συμμετείχαν.

3. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει:

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0.$$

Να προσδιορίσετε τον μέγιστο θετικό αριθμό μ που είναι τέτοιος ώστε:

$$x+y+z+\mu\leq 0.$$

4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{B}=90^o$, ΑΔ=α και ΑΒ=ΒΓ=2α.
1) Να αποδείξετε ότι ΔΑ+ΑΓ<ΔΒ+ΒΓ.
2) Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα ΔΜ+ΜΓ είναι το ελάχιστο δυνατό.
3) Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.