ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΧΡΗΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Ι

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R \to R$ με την ιδιότητα

$$\alpha f(\alpha x) = f(x) + (\alpha^2 - 1)x - 2\alpha + 2,\ |\alpha| \prec 1$$

Να δείξετε ότι $f(x) = x - 2$

ΛΥΣΗ

Η αρχική γράφεται: $\alpha\left[f(\alpha x) - \alpha x + 2\right] = f(x) - x + 2$

Έστω $g(x) = f(x) - x + 2$. Τότε: $g(x) = \alpha g(\alpha x)$ **(**1)

Η (1) $x \to \alpha^1 x$

$$g(\alpha x) = \alpha\left(g\left(\alpha^2 x\right)\right)$$

(1) $x \to \alpha^2 x$

$$g\left(\alpha^2 x\right) = \alpha\left(g\left(\alpha^3 x\right)\right)$$

(1) $x \to \alpha^3 x$

$$g\left(\alpha^3 x\right) = \alpha\left(g\left(\alpha^4 x\right)\right)$$

……

(1) $x \to \alpha^{\nu-1} x$

$$g\left(\alpha^{\nu-1} x\right) = \alpha\left(g\left(\alpha^{\nu} x\right)\right)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη

$$g(x) = \alpha^{\nu} g\left(\alpha^{\nu} x\right)$$

$$\lim_{\nu\to+\infty} g(x) = \lim_{\nu\to+\infty} \alpha^{\nu} \cdot g\left(\lim_{\nu\to+\infty} \alpha^{\nu} x\right) = 0 \cdot g(0) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x - 2$$

ΘΕΜΑ ΙΙ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+x^2\eta\mu\dfrac{2}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

i) Βρείτε την παράγωγο $f'(x)$, για κάθε $x\in R$

ii) Να εξετάσετε αν η f' είναι συνεχής στο $x_0=0$

iii) Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ η f δεν είναι αύξουσα στο $(-\varepsilon,\varepsilon)$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε για $x\neq 0$

$$f'(x)=1+2x\eta\mu\frac{2}{x}-2\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\eta\mu\frac{2}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}1+x\eta\mu\frac{2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+2\frac{\eta\mu\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\right)=1,$$

$$\left|\frac{\eta\mu\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\right|\leq\frac{1}{|\omega|}\to 0 \qquad \left(\omega=\frac{2}{x}\right)$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases} 1+2x\eta\mu\dfrac{2}{x}-2\sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}, & x\neq 0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$

ii) Για την συνέχεια της f' θα κάνουμε χρήση ακολουθίες.

Έστω $x_\nu=\dfrac{1}{\nu\pi},\nu\in N^*,\quad y_\nu=\dfrac{1}{\nu\pi+\dfrac{\pi}{2}},\nu\in N^*$

Οι οποίες έχουν όριο το 0 δηλαδή

$x_\nu\to 0,\quad y_\nu\to 0$

$f(x_\nu)=1+2\nu\pi\eta\mu 2\nu\pi-2\sigma\upsilon\nu 2\nu\pi=1-2=-1\to -1$

$f(y_\nu)=1+(2\nu\pi+\pi)2\nu\pi\cdot\eta\mu(2\nu\pi+\pi)-2\sigma\upsilon\nu(2\nu\pi+\pi)=1+2=3\neq -1$

Οπότε δεν υπάρχει το όριο της $f'(x)$, όταν $x\to 0$.

iii) Για τις ακολουθίες $(x_\nu),(y_\nu)$

$0<\dfrac{1}{\nu\pi+\dfrac{\pi}{2}}<\dfrac{1}{\nu\pi}<\varepsilon$, από κάποιο ν και έπειτα

$$f'\left(\frac{1}{\nu\pi}\right)=1+2\nu\pi\eta\mu(2\nu\pi)-2\sigma\upsilon\nu 2\nu\pi=-1<0$$

$$f'\left(\frac{1}{\nu\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right)=1+(2\nu\pi+\pi)\eta\mu(2\nu\pi+\pi)-2\sigma\upsilon\nu(2\nu\pi+\pi)=3>0$$

Άρα η f' δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Έτσι η f δεν είναι αύξουσα στο $(-\varepsilon,\varepsilon)$.

ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Μπορεί μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα, να μην έχει στο άκρο του διαστήματος τοπικό ακρότατο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ΝΑΙ

Έστω $f(x)=\begin{cases} x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 0.

Έστω $x_\nu=\dfrac{1}{2\nu\pi}$, $y_\nu=\dfrac{1}{2\nu\pi+\pi}$, $\nu\in N^*$

$$f\left(\frac{1}{2\nu\pi}\right)-\left(\frac{1}{2\nu\pi}\right)^2>0$$

$$f\left(\frac{1}{2\nu\pi+\pi}\right)=-\left(\frac{1}{2\nu\pi+\pi}\right)^2<0$$

Αυτό σημαίνει ότι η f παίρνει «κοντά» στο 0 άπειρες θετικές και αρνητικές τιμές οπότε το $f(0)=0$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

ΘΕΜΑ 5

Υπάρχουν στάσιμα σημεία εσωτερικά ενός διαστήματος Δ, στα οποία μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση σε αυτά να μην παρουσιάζει ακρότατο ούτε σημείο καμπής, αλλά να έχει οριζόντια εφαπτομένη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ΝΑΙ

Έστω $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\eta\mu\frac{1}{x}\overset{t=\left|\frac{1}{x}\right|}{=\!=}\lim_{t\to+\infty}\frac{\eta\mu t}{t}=0,\quad \left|\frac{\eta\mu t}{t}\right|\leq\frac{1}{|t|}\to 0$$

Άρα $f'(0)=0$, οπότε το σημείο 0 είναι στάσιμο σημείο.

Η απόδειξη ότι στο $x=0$ η f δεν παρουσιάζει ακρότατο <u>είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι όσο και αν πλησιάσουμε το σημείο 0</u> υπάρχουν τόσο αρνητικές όσο και θετικές τιμές της f.

Έστω $x_\nu=\dfrac{2}{4\nu\pi+\pi},\quad y_\nu=\dfrac{2}{4\nu\pi-\pi}$

$x_\nu\to 0,\ y_\nu\to 0$

$$f(x_\nu)=\left(\frac{2}{4\nu\pi+\pi}\right)^2>0$$

$$f(y_\nu)=f\left(\frac{2}{4\nu\pi-\pi}\right)=-\left(\frac{2}{4\nu\pi-\pi}\right)^2<0$$

Για την εφαπτομένη στο $x=0$

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=f(0)\Rightarrow y=0$ Άρα ο $x'x$ άξονας.

Ο x άξονας τέμνει την C_f σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων, οσοδήποτε κοντά στο 0 (στο σημείο $\dfrac{1}{\kappa\pi},\kappa\in N^*$). Άρα σε κανένα διάστημα $(0,\varepsilon)$ ή $(-\varepsilon,0)$ με $\varepsilon>0$ η f δεν στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω. Επομένως το $x=0$ <u>δεν μπορεί να είναι</u> θέση σημείου καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

ΘΕΜΑ 6

Έστω $f:R\to R$ μια αντιστρέψιμη και συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι η αντίστροφη της f^{-1} είναι συνεχής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $y_0\in f([\alpha,\beta])\subseteq D(f^{-1})$ και ακολουθία (y_ν) $\nu\in N$, $y_\nu\in f([\alpha,\beta])$ και $y_\nu\to y_0$.

Αν $x_\nu=f^{-1}(y_\nu)$, $x_0=f^{-1}(y_0)$ θα δείξω $x_\nu\to x_0$.

Έστω ότι η (x_ν) δεν συγκλίνει στο x_0. Τότε $\exists\varepsilon>0:\nu\geq\nu_0$ να ισχύει

$|x_\nu-x_0|\geq\varepsilon$. $\otimes$

Θεωρούμε την υπακολουθία $(\overline{x}_\nu)$ $\nu\in N$ της (x_ν) $\nu\in N$, για την οποία για κάθε ν ισχύει $|\overline{x}_\nu-x_0|\geq\varepsilon$.

Η υπακολουθία $(\overline{x}_\nu)$ στο $[\alpha,\beta]$ είναι <u>φραγμένη </u>και από το θεώρημα **Bolzano – Weierstass**, <u>προκύπτει ότι έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία</u>.

Έστω $(y_\nu)_{\nu\in N}$ η συγκλίνουσα υπακολουθία της $(\overline{x}_\nu)$.

Αν $y_\nu\to\overline{x}_0$, $\overline{x}_0\neq x_0$ λόγου $\otimes$, τότε θα ισχύει $f(y_\nu)\to f(\overline{x}_0)$ (1) αφού η f συνεχής.

Όμως $f(y_\nu)_{\nu\in N}$ είναι υπακολουθία της $f(x_\nu)_{\nu\in N}=(y_\nu)_{\nu\in N}$ και $y_\nu\to y_0=f(x_0)$

Επομένως $f(x_\nu)\to f(x_0)$ (2)

Άρα (1),(2) $f(x_0)=f(\overline{x}_0)$ άτοπο αφού η f "1−1".

ΘΕΜΑ 7

Έστω f γνησίως μονότονη και "$1-1$" στο $[\alpha,\beta]$. Αν η f παίρνει μέγιστη M και ελάχιστη τιμή m στο $[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω η $f \uparrow$, τότε $f(\alpha)=m$, $f(\beta)=M$.

Αν $x_0 \in (\alpha,\beta)$ θα δείξω $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=y_0$.

Έστω $\varepsilon>0$

$y_0-\varepsilon<y_0<y_0+\varepsilon$ τότε $f^{-1}(y_0-\varepsilon)<f^{-1}(y_0)<f^{-1}(y_0+\varepsilon)$

$x_1<x_0<x_2$, $\quad x_1=f^{-1}(y_0-\varepsilon)$, $\quad x_2=f^{-1}(y_0+\varepsilon)$

Αν επιλέξουμε $\delta(\varepsilon)=\min\{x_0-x_1, x_2-x_0\}$ τότε

$x_1\le x_0-\delta<x_0+\delta\le x_2$ οπότε

$f(x_1)\le f(x_0-\delta)<f(x_0+\delta)\le f(x_2)$

Άρα $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ το $f(x)\in(f(x_1), f(x_2))$ οπότε η f συνεχής συνάρτηση.

ΘΕΩΡΗΜΑ (συνέχειας)

Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι και $\Phi: X\to Y$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα.

α) Η Φ συνεχής παντού στο X.

β) Για κάθε $(x_n)_{n\in N}\subseteq x$ με $x_n\to x_0$

$f(x_n)\to f(x_0)$

γ) Για κάθε $\alpha\in X$ και κάθε γειτονιά V του $\Phi(\alpha)$, υπάρχει γειτονιά U του α, έτσι ώστε $\Phi(U)\subset V$.

δ) Για κάθε G ανοιχτό υποσύνολο του Y το $\phi^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.

ε) Για κάθε F κλειστό υποσύνολο του Y το $\phi^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

στ) Για κάθε υποσύνολο A του X $\quad \phi(\overline{A})\subset\overline{\phi(A)}$

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ ΚΩΣΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΘΕΜΑ 9

Έστω $f(x)=\begin{cases} x\left(1+2x\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0 & , x=0\end{cases}$

i) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R .

ii) Να βρείτε την $f'(x)$, $f'(0)$ και να δείξετε ότι η f' δεν είναι συνεχής στο 0.

iii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει διάστημα $(-δ,δ)$, $δ>0$ ώστε η f να είναι αύξουσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν f παραγωγίσιμη και $f'(ξ)>0$, $\big(f'(ξ)<0\big)$ δεν έπεται η f αύξουσα (ή φθίνουσα).

Για να ισχύει κάτι τέτοιο πρέπει η f' συνεχής στο ξ.

ΛΥΣΗ

i) Είναι $f'(x)=1+4x\cdot ημ\dfrac{1}{x}-2συν\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+2x\cdot ημ\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+2x\cdot ημ\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+2\cdot\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=$$

$=1+2\cdot 0=1$

Αφού,αν $t=\dfrac{1}{x}$ $\quad \left|\dfrac{ημt}{t}\right|\leq\dfrac{1}{t}\xrightarrow{t\to+\infty}0$

,

ii) Άρα $f'(x)=\begin{cases}1+4x\cdot ημ\dfrac{1}{x}-2συν\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1 & , x=0\end{cases}$ $\quad ,f'(0)=1>0$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(1+4x\cdot ημ\frac{1}{x}-2συν\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+4x\cdot ημ\frac{1}{x}\right)=1+4\cdot 0=1$$

Η συνάρτηση $g(x)=2συν\dfrac{1}{x}$ δεν έχει όριο στο 0 διότι αν $x_ν=\dfrac{1}{2νπ}$, $y_ν=\dfrac{1}{2νπ+\frac{π}{2}}$,

$ν\to+\infty$, $ν\in N^*$ έχουμε $x_ν\to 0$, $y_ν\to 0$. Τότε:

$g(x_ν)=2συν(2νπ)=1$

$g\left(y_\nu\right)=2\sigma\upsilon\nu\left(2\nu\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$

άρα η g δεν έχει όριο στο 0 οπότε και η f' δεν έχει όριο στο 0.

iii) Έχουμε $f'(0)>1$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι αύξουσα κοντά στο 0 (χρειάζεται συνέχεια της f').

Υπάρχει $\nu\in N$ (αρκετά μεγάλο) :

$$x_1=\frac{1}{2\nu\pi}>x_2=\frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}>x_3=\frac{1}{2\nu\pi+\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$\delta>x_1>x_2>x_3>-\delta$. Τότε

$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ και $f\left(x_3\right)<f\left(x_1\right)$

Άρα η f δεν είναι $\uparrow$ στο $(-\delta,\delta)$.

ΘΕΜΑ 10

Έστω $\alpha\in(0,1)$ και συνάρτηση $f:R\to R$ με $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(\alpha x)}{x}=0$.

Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(\alpha x)}{x}=0$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\alpha x)-f(\alpha^2x)}{\alpha x}=0$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\alpha^2x)-f(\alpha^3x)}{\alpha x}=0$, … , $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\alpha^{\nu-1}x)-f(\alpha^\nu x)}{\alpha^{\nu-1}x}=0$, $\nu\in N^*$.

Έτσι για κάθε $\varepsilon'>0$, $\exists\delta>0:\forall x:0<|x|<\delta$ να ισχύει

$$\left|\frac{f(\alpha^{\kappa-1}x)-f(\alpha^\kappa x)}{\alpha^{\kappa-1}x}\right|<\varepsilon'\qquad \kappa=1,2,\dots,\nu$$

<u>*Σημείωση*</u>: Τα $\varepsilon'\le\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_\nu\}$ $\delta\le\min\{\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_\nu\}$ όλων των προηγούμενων ορίων εάν εκφραστούν με ε και δ.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ για κάθε ακολουθία (α^ν) με $\alpha^\nu\to0$ θα είναι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}f\left(\alpha_\nu\right)=0$.

Επομένως για $\alpha_\nu=\alpha^\nu x\to0$ είναι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}f\left(\alpha^\nu x\right)=0$.

Έτσι $\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left|\frac{f(x)-f(\alpha^\nu x)}{x}\right|$

Όμως είναι

$$\left|\frac{f(x)-f(\alpha^{\nu}x)}{x}\right|=\left|\begin{array}{l}\frac{f(x)-f(\alpha x)}{x}+\alpha\frac{f(\alpha x)-f(\alpha^2 x)}{\alpha x}+\alpha^2\frac{f(\alpha^2 x)-f(\alpha^3 x)}{\alpha^2 x}+\\+\alpha^3\frac{f(\alpha^3 x)-f(\alpha^4 x)}{\alpha^3 x}+\ldots+\alpha^{\nu-1}\frac{f(\alpha^{\nu-1}x)-f(\alpha^{\nu}x)}{\alpha^{\nu-1}x}\end{array}\right|\leq$$

$$\left|\frac{f(x)-f(\alpha x)}{x}\right|+\alpha\left|\frac{f(\alpha x)-f(\alpha^2 x)}{\alpha x}\right|+\alpha^2\left|\frac{f(\alpha^2 x)-f(\alpha^3 x)}{\alpha^2 x}\right|+\ldots+\alpha^{\nu-1}\left|\frac{f(\alpha^{\nu-1}x)-f(\alpha^{\nu}x)}{\alpha^{\nu-1}x}\right|$$

Άρα

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leq\lim_{\nu\to+\infty}\left\{\begin{array}{l}\left|\frac{f(x)-f(\alpha x)}{x}\right|+\alpha\left|\frac{f(\alpha x)-f(\alpha^2 x)}{\alpha x}\right|+\alpha^2\left|\frac{f(\alpha^2 x)-f(\alpha^3 x)}{\alpha^2 x}\right|+\\+\ldots+\alpha^{\nu-1}\left|\frac{f(\alpha^{\nu-1}x)-f(\alpha^{\nu}x)}{\alpha^{\nu-1}x}\right|\end{array}\right\}<$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left\{1\cdot\varepsilon'+\alpha\varepsilon'+\ldots+\alpha^{\nu-1}\varepsilon'\right\}=\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\alpha+\alpha^2\ldots+\alpha^{\nu-1}\right)\varepsilon'=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\alpha^{\nu}-1}{\alpha-1}\varepsilon=$$

$$=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1-\alpha^{\nu}}{1-\alpha}\varepsilon'$$

Αν εκλέξουμε $\varepsilon'=(1-\alpha)\varepsilon$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1-\alpha^{\nu}}{1-\alpha}(1-\alpha)\varepsilon=\lim_{\nu\to+\infty}\left(1-\alpha^{\nu}\right)\varepsilon=\varepsilon$$

αφού $|\alpha|<1\Rightarrow\alpha^{\nu}\to 0$

Άρα $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall x:0<|x|<\delta$ να ισχύει:

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$